Le 4 mai 2020,

Bonjour à tous,

J'espère que vous allez toujours tous bien et que les 5 mousquetaires qui ont fait l'examen blanc s'en sont bien sortis. Donnez-moi vos impressions si vous avez envie.

Je reviens vers vous pour éviter que vous ne vous ennuyiez sans votre cours préféré !!!!

Tout d'abord j'ai remarqué 3 fautes de frappe dans le paragraphe 6 sur le Binôme de Newton. Les modifications étaient faites à la main dans mon cours mais pas sur la version électronique. Le signe sommatoire qui donne la formule du Binôme de Newton (généralisation des produits remarquables vus en 2° et 4°) commence à k = 0 et non pas k =1. J'ai fait les modifications dans le document qui suit.

Je joins également une feuille d'exercices sur ce Binôme de Newton et les correctifs de quelques exercices pour que vous puissiez faire les autres.

Finalement, je vous envoie la théorie du cours de probabilités. Prenez le temps de vous en imprégner et de bien la comprendre et ensuite je vous enverrai les exercices. Ce n'est pas techniquement difficile, il n'y a que quelques formules, mais il faut arriver à traduire l'énoncé exprimé en langue française en langage mathématique ce qui est quelques fois plus difficile que de faire un exercice compliqué de dérivée ou d'intégrale.

N'hésitez pas à me poser des questions, je vous réponds le plus rapidement possible. N'oubliez pas que la matière que je vous donne ici ne fera pas l'objet d'une évaluation sommative (un contrôle) mais c'est de la matière dont vous aurez besoin l'année prochaine quelle que soit l'option que vous choisirez à l'université (sauf si vous faites les romanes ou les langues bien sûr mais alors c'est que vous vous êtes fortement fourvoyés dans votre choix d'options ce qui n'est pas le cas je crois) ou dans une haute école.

C'est donc un travail pour VOUS et qui vous préparera à l'année prochaine. Pensez à votre avenir, même si je sais qu'il est à ce jour très difficile de se projeter dans cet avenir, mais quel que soit le temps qu'il faudra pour sortir de cette crise on en sortira, l'être humain peut se surpasser dans de telles conditions et donner le meilleur de lui-même.

M. Bottin

6. Le binôme de Newton

Le binôme de Newton est le produit de n facteurs égaux à (a + b), c'est-à-dire la nième puissance de ce binôme et nous allons montrer que : $\boxed{(x+a)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, x^{n-k} \, a^k}$.

Rem. : Les C_n^p peuvent être déterminés au moyen du triangle de Pascal.

Vérifions cette formule pour n=1, n=2, n=3 (formules bien connues, en fait) :

$$(x+a)^1 = x+a = C_1^0 x^1 a^0 + C_1^1 x^0 a^1$$
$$(x+a)^2 = x^2 + 2xa + a^2 = C_2^0 x^2 a^0 + C_2^1 x^1 a^1 + C_2^2 x^0 a^2$$
$$(x+a)^3 = x^3 + 3x^2 a + 3xa^2 + a^3 = C_3^0 x^3 a^0 + C_3^1 x^2 a^1 + C_3^2 x^1 a^2 + C_3^3 x^0 a^3$$

Nous allons démontrer la formule **par récurrence**, c'est-à-dire que comme nous venons de la démontrer pour n=1 (et même n =2 et n=3) nous allons démontrer que si la formule est correcte pour n, elle le sera pour n+1, et ce, quel que soit n. Dès lors, puisqu'elle est vraie pour n=1 (ou 2 ou 3), elle le sera pour tout n.

Supposons que : $(x+a)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, x^{n-k} \, a^k$ alors, comme $(x+a)^{n+1} = (x+a).(x+a)^n$, on aura :

$$(x+a)^{n+1} = (x+a).\sum_{k=0}^{n} C_n^k \, x^{n-k} \, a^k = (x+a).(C_n^0 \, x^n + C_n^1 \, x^{n-1} \, a + \cdots + C_n^n \, a^n$$

$$= C_n^0 x^{n+1} + C_n^1 x^n a + C_n^2 x^{n-1} a^2 + \ldots + \ldots + C_n^{n-1} x^2 a^{n-1} + C_n^n x a^n$$

$$+ C_n^0 x^n a + C_n^1 x^{n-1} a^2 + C_n^2 x^{n-2} a^3 + \ldots + \ldots + C_n^{n-1} x \, a^n + C_n^n a^{n+1}$$

$$= C_n^0 x^{n+1} + (C_n^0 + C_n^1) x^n a + (C_n^1 + C_n^2) x^{n-1} a^2 + \ldots + (C_n^{n-1} + C_n^n) x^1 a^n + C_n^n a^{n+1}$$

et comme $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$ et que $C_1^0 = C_2^0 = \ldots = C_m^0 = 1$

$$= C_{n+1}^0 x^{n+1} + C_{n+1}^1 x^n a + C_{n+1}^2 x^{n-1} a^2 + \ldots + \ldots + C_{n+1}^{n-1} x^2 a^{n-1} + C_{n+1}^n x a^n + C_{n+1}^{n+1} a^{n+1}$$

$$= \sum_{i=0}^{n+1} C_{n+1}^i x^i a^{(n+1)-i}$$

ce qui est bien la formule annoncée.

<u>Exemple :</u> $(x+2)^5 = x^5 + 5.x^4.2 + 10.x^3.2^2 + 10.x^2.2^3 + 5.x.2^4 + 2^5$

$$= x^5 + 10.x^4 + 40.x^3 + 80.x^2 + 80.x + 32$$

Exercices sur le Binôme de Newton

1. Etablissez le développement des binômes suivants:

   1) $(a-2b)^5$
   2) $(x^2+\frac{1}{x})^4$
   3) $(1+i)^5$
   4) $\left(\frac{2}{x}-\frac{x^2}{2}\right)^6$
   5) $\left(1+i\sqrt{3}\right)^4$

2. Calculez le 7° terme du développement de $(3x-\frac{2}{x})^{11}$
3. Calculez le terme en

   1)x^6 dans $(3x^2-2)^{10}$

   2) u dans $(2u^2-\frac{4}{u})^5$

   3) x^{16} dans $x^{10}\,(x+7)^8$

4. Calculez le(s) terme(s) milieu(x) dans les développements suivants:
   1) $(3x+2)^{12}$
   2) $(4k^2-\frac{3}{k})^{11}$
   3) $(t\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}})^7$
5. Démontrez que $\sum_{i=0}^{n} C_n^i = 2^n$

6. Démontrez que 1) si n est pair : $C_n^0+C_n^2+C_n^4+\ldots\ldots\ldots+C_n^n = 2^{n-1}$

   2) si n est impair: $C_n^1+C_n^3+C_n^5+\ldots\ldots\ldots+C_n^n = 2^{n-1}$

   3) $C_n^p = C_{n-2}^p + 2C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^{p-2}$

7. Calculez l'expression $C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \cdots$ et vérifiez le résultat obtenu pour n=9

   Suggestion: calculer $(1+i)^n$ de deux manières différentes (formes algébriques et trigonométriques des nombres complexes)

Correction des exos sur le Binôme de Newton

$$(x+a)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, x^{n-k} \, a^k$$

1.2) $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^4 = \sum_{k=0}^{4} C_4^k \left(x^2\right)^{4-k} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^k$

$= C_4^0 (x^2)^4 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^0 + C_4^1 (x^2)^3 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^1 + C_4^2 (x^2)^2 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^2$

$+ C_4^3 (x^2)^1 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^3 + C_4^4 \cdot (x^2)^0 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^4$ (La somme des exposants est tjs égale à 4)

$= 1 \cdot x^8 + 4 \cdot x^6 \cdot \frac{1}{x} + 6 \cdot x^4 \cdot \frac{1}{x^2} + 4 \cdot x^2 \cdot \frac{1}{x^3} + 1 \cdot \frac{1}{x^4}$

$= x^8 + 4x^5 + 6x^2 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^4}.$

3) $(1+i)^5 = \sum_{k=0}^{5} C_5^k \, 1^{5-k} \cdot i^k$ avec $i^2 = -1$

$= C_5^0 \, 1^5 \cdot i^0 + C_5^1 \, 1^4 \cdot i^1 + C_5^2 \, 1^3 \cdot i^2 + C_5^3 \, 1^2 \cdot i^3 + C_5^4 \cdot 1 \cdot i^4$

$+ C_5^5 \cdot 1^0 \cdot i^5$

$= 1 + 5i + 10(-1) + 10 \cdot (-i) + 5 \cdot 1 + 1 \cdot i$

$= 1 + 5i - 10 - 10i + 5 + i$

$= -4 - 4i$

Rq : Avec la Formule de Moivre (vue ds ch. des N.C)

$1+i = \sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4} \Rightarrow (1+i)^5 = (\sqrt{2})^5 \operatorname{cis} \frac{5\pi}{4} = 4\sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{4} - i \sin\frac{\pi}{4}\right)$

$= 4\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$= -4 - 4i.$

3. Le terme général de $(3x^2-2)^{10}$ s'écrit : $C_{10}^{k}(3x^2)^{10-k}.2^{k}.(-1)^{k}$

Rq : Comme il s'agit d'une différence, elle peut être vue comme une somme $(3x^2+(-2))^{10}$. Selon l'exposant de (-2), le résultat de $(-2)^k$ est soit positif soit négatif (selon la parité de k) donc, comme dans $(a-b)^3$, le signe $-$ apparaît dans tous les termes où k est impair (un terme sur 2 à partir du 2°)

Modifions le terme général en appliquant les propriétés des puissances :

$$C_{10}^{k}.\ 3^{10-k}.\ x^{20-2k}.\ 2^{k}.(-1)^{k}.$$

Pour trouver le terme en x^6, il faut trouver k tel que :

$$20-2k=6$$
$$2k=14$$
$$k=7$$

Donc ce terme en x^6 est : $C_{10}^{7}.3^{3}.x^{6}.\ 2^{7}.(-1)^{7}$

$$= -C_{10}^{7}.27.128.x^{6}$$
$$= -414720\,x^{6}.$$

(Réponse 3 : 2) $-2560\,x$ 3) $1372\,x^{16}$)

2. Réponse : $7185024.\frac{1}{x}$

4. 1) Dans $(3x+2)^{12}$ il y a 13 termes $(k=0,1,\dots,12)$ donc celui du milieu correspond à $k=6$

Il vaut donc : $C_{12}^{6}.(3x)^{6}.\ 2^{6} = C_{12}^{6}.3^{6}.2^{6}.x^{6} = 43110144\,x^{6}.$

2) Il y a dans ce cas 12 termes donc il y aura : deux termes milieux qui correspondent à $k=5$ et $k=6$

(Réponses : $-459841536\,k^{7}$ et $344811150\,k^{4}$)

3) Réponses : $-35\sqrt{2}\,t^4$ et $35\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot t^3$.

5. On part de l'égalité : $2^n = (1+1)^n$ puis on développe le B.D

$$2^n = (1+1)^n = C_n^0\underbrace{1^n\cdot 1^0}_{1} + C_n^1\cdot\underbrace{1^{n-1}\cdot 1}_{1} + C_n^2\cdot\underbrace{1^{n-2}\cdot 1^2}_{1} + \cdots + C_n^n\underbrace{1^0\cdot 1^n}_{1}$$

$$= C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n$$

$$= \sum_{i=0}^{n} C_n^i$$

A vous faire les exercices restants !!